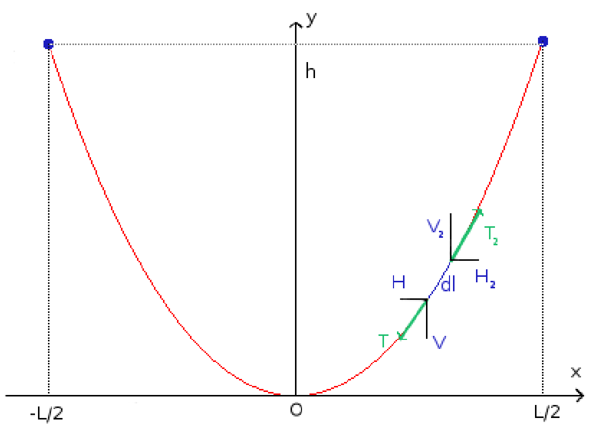
TP Maple 4 : La chaînette
Enoncé

ISEN N1

La chaînette est la forme prise par un fil pesant flexible infiniment mince homogène inextensible suspendu entre deux points, placé dans un champ de pesanteur uniforme ; Galilée pensait que c'était un arc de parabole, mais Leibniz, Jean Bernoulli, et Huygens ont montré en 1691, indépendamment, qu'il n'en était rien[1]. Nous vous proposons dans ce TP de déterminer l'équation de la chaînette ainsi que la force de traction le long du fil. Une rapide préparation vous est demandée afin de commencer à résoudre le problème avec Maple dès le début de la séance. Il est également possible d'effectuer tous les calculs littéraux de la deuxième partie à la main...

1 Préparation

Soit un fil de masse linéique μ non négligeable et de longueur l, suspendu à ses deux extrémités à une hauteur h, le bas du fil étant la référence. La distance entre les deux fils est notée L. Pour faciliter la résolution du problème, nous reportons les notations sur la figure ci-dessous.



Raisonnons sur une portion locale du fil (on la considère donc linéaire). T désigne *la force de traction* (dans la direction du fil) en un point quelconque du fil, H sa composante horizontale et V sa composante horizontale.

- Effectuer le bilan des forces. Projeter les forces sur les axes.
- En considérant que $V_2 = V + dV$, calculer dV en fonction de μ, g et dl.
- Donner la pente de la portion locale du fil. En déduire y'.
- Différencier l'égalité obtenue.
- A l'aide du théorème de Pythagore, montrer que

$$l' = \sqrt{1 + y'^2} \tag{1}$$

- Enfin, en déduire l'égalité suivante :

$$\frac{\mu g}{H} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \tag{2}$$

2 Résolution du problème

Pour résoudre une équation différentielle sous Maple, utiliser la fonction *dsolve*. Se référer à l'aide pour son utilisation.

- A partir de l'équation différentielle 2, donner l'équation de la chaînette en fonction de μ, g et H. Spécifier deux conditions initiales pour éliminer les constantes arbitraires de la solution.
- Donner l'expression de la flèche h, amplitude maximale de la déformation de la chaînette, à partir de l'équation de celle-ci.
- Résoudre ensuite l'équation différentielle 1, en spécifiant une condition initiale.
- Exprimer la longueur du fil en fonction de μ, g, L et H, à l'aide de la fonction *subs*.
- Créer une procédure *chainette* qui donne, en fonction de μ, g, L et l, une approximation numérique de l'équation de la chaînette. Indice : déterminer d'abord H à partir de l'expression de la longueur à l'aide de $fsolve$.
- On dispose d'une chaîne de longueur $l = 1m$. Les extrémités sont à une distance $L = 0.4$. Créer une procédure qui trace la courbe correpondante, en prenant soin de bien spécifier les bornes. Tracer la configuration de la chaîne, en prenant $g = 9,8m.s^{-2}$ et $\mu = 10g.m^{-1}$.
- Créer une procédure qui trace sur le même graphe la parabole passant par les mêmes points en $-L/2$, 0 et $L/2$.
- On éloigne maintenant les deux extrémités de la chaîne à une distance de $L = 1m$ par pas de $0,1m$. Tracer les configurations successives de la chaîne avec les paraboles correspondantes.
- La parabole peut-elle être une bonne approximation ? Pour répondre, calculer l'erreur obtenue par rapport à l'axes des ordonnées.

[1] Plus d'information sur http ://www.mathcurve.com/courbes2d/chainette/chainette.shtml